14 ODVODI

1. Zapiši definicijo odvoda in obrazloži njegov geometrijski pomen.
2. S pomočjo definicije odvoda odvajaj funkcijo $f(x) = x^2 + 1$.
3. Zapiši odvode vseh elementarnih funkcij.
4. Kako izračunamo globalni ekstrem funkcije na danem zaprtem intervalu?
5. Izračunaj odvoda spodnjih funkcij:
   - $f(x) = \frac{x^2-2}{\frac{3}{2}x^3+x-4}$
   - $g(x) = \sin(2x-3) \cdot \ln x$

   Poišči še sam nekaj primerov funkcij in jih odvajaj.
6. Dana je funkcija $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-4}$. Izračunaj ničle, pole, asimptote, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti in konkavnosti in nariši njen graf.
7. Dana je funkcija $f(x) = \frac{2x^2-2}{5x^2+4x}$.
   - Izračunaj ničle, pole, asimptote, lokalne ekstreme in nariši graf.
   - Izračunaj največjo in najmanjšo vrednost funkcije na intervalu $[-3,-1]$.
8. Izračunaj kot med krivuljama $x^2 + 2y^2 = 3$ in $2x^2 - y^2 = 1$. Poimenuj krivulji in nariši skico.
9. Napiši enačbi tangent na elipso $x^2 + 4y^2 = 16$ v točki z abscio $x_0 = 2$.
10. S pomočjo diferenciala izračunaj približni vrednosti $\sqrt[3]{28}$ in $\log 105$.

11. Izračunaj prve odvode spodnjih funkcij in rezultate poenostavi:
    - $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$
    - $g(x) = \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$
    - $h(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sin x$
    - $i(x) = \ln\frac{x+1}{x-2}$

12. Izračunaj intervale naraščanja in padanja ter lokalne ekstreme funkcije $f(x) = e^x(x^2 - 2x - 7)$.

13. V katerih točkah krivulje $y = 2^{-x} - 2^{-2x}$ je tangenta vzporedna abscisni osi?

14. Zapiši enačbo tangente in normale na krivuljo $y^2 = 2x$ v točki $T(8, y > 0)$. Nariši skico. Nalogo reši na dva različna načina.

15. Dana je funkcija $f(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot \cos x$. Določi a tako, da bo imela funkcija lokalni ekstrem pri $x = \frac{\pi}{3}$.

16. Kako bi izračunal kot med ordinatno osjo in grafom funkcije? Natančno opiši vse korake.

17. Pod kakšnim kotom seka ordinatno os graf funkcije $f(x) = \cos(\ln(x+1))$?

18. V katerih točkah ima krivulja $y = 2^{-x} - 2^{-2x}$ normale z naklonskim kotom 135°?

19. Pločevinka ima obliko valja s prostornino $128\pi\ cm^3$. Poišči mere tega valja, če bi radi proizvajalci porabili kar najmanj pločevine za izdelavo pločevinke.

20. Zapiši točke, kjer je tangenta na graf funkcije $f(x) = 3\ln x + 1$ pravokotna na premico $2x + y - 3 = 0$.

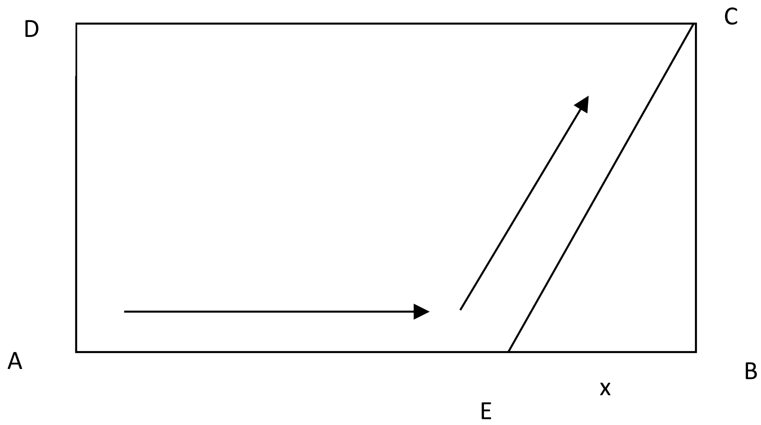
21. Določi realno število a tako, da bo graf funkcije $f(x) = \ln(2 + ax)$ sekal abscisno os pod kotom $45°$.

22. Vlak vozi s hitrostjo $90\ km/h$. Pri tej hitrosti se zaustavi na razdalji $1\ km$. Koliko časa se vlak zaustavlja, če veš, da je odvisnost poti zaustavljanja od časa kvadratna (tj. $s(t) = at^2 + bt + c$, kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$)?

23. Kolikšno naj bo razmerje med radijem in višino v valju, da bo njegova prostornina največja pri dani površini?

24. Naj bo $ABCD$ pravokotno polje (glej sliko) z dolžino $|AB| = 155\ m$ in širino $|CD| = 60\ m$. AB je pot ob pravkar zoranem polju. Simon bi rad najhitreje pritekel iz točke A do točke C, pri čemer ve, da lahko po poti AB ob polju teče s hitrostjo 260 m/min po zoranemu polju pa le s hitrostjo 100 m/min. Kje na poti AB se mora nahajati točka E, da bo Simon najhitreje pretekel razdaljo od A do C?

Namig: Z $x = |EB|$ izrazi $|AE|\ in\ |EC|$ ter čas, ki je potreben, da Simon priteče v C.



Opomba:

Pri nekaterih nalogah (npr. 6, 7, 8, 9, 12, 14 in 20) lahko preveriš pravilnost svojih rešitev s pomočjo programa dinamične geometrije.